Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 28.01.2013.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(25%) a) Tačka A_1 je presjek simetrale ugla A i naspremne strane BC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

(25%) b) Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je $\dfrac{A_2B}{A_2C} = \dfrac{AB}{AC}$.

(50%) c) Na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ date su redom tačke A_1, B_1 i C_1, takve da je $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$. Dokazati da je $\triangle A_1B_1C_1$ jednakostraničan ako i samo ako je $\triangle ABC$ jednakostraničan.

Zadatak br. 2

(30%) a) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

(70%) b) Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisanog kruga i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Zadatak br. 3

(20%) a) Za dva data kruga konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

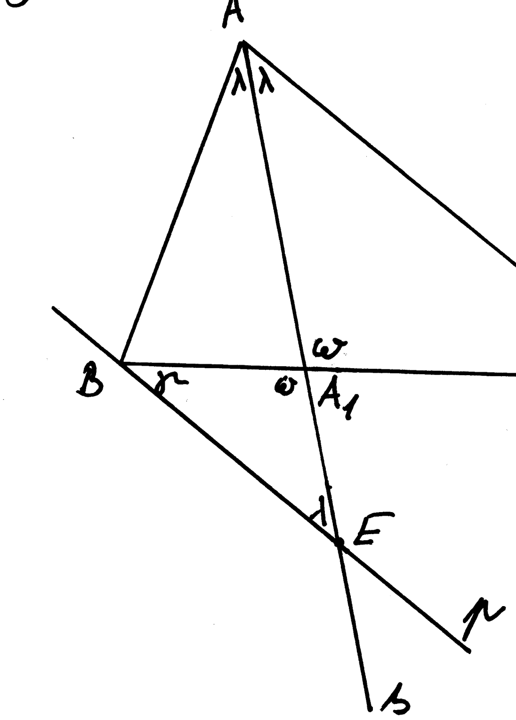
(20%) b) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

(60%) Konstruisati krug koji dodiruje dva data kruga i datu pravu. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Tačka A_1 je presjek simetrale ugla A i naspremne strane BC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$.

Rj.



Neka je dat $\triangle ABC$ i neka je s simetrala ugla $\sphericalangle CAB$. Sa A_1 označimo presjek $\{A_1\} = s \cap BC$.

Neka je p prava takva da $B \in p$ i $p \parallel p(A,C)$.

Neka je $\{E\} = s \cap p$

Posmatrajmo trouglove $\triangle BA_1E$ i $\triangle AA_1C$.

Pokažimo da je $\triangle AA_1C \sim \triangle BA_1E$

$p(B,E) \parallel p(A,C)$ i $p(A,E)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle BEA_1 \cong \sphericalangle CAA_1 = \lambda$

$\sphericalangle BA_1E \cong \sphericalangle CA_1A$ (unakrsni)

$p(B,E) \parallel p(A,C)$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle A_1CA \cong \sphericalangle ABE = \gamma$.

Prema sličnosti UUU $\Rightarrow \triangle AA_1C \sim \triangle BA_1E$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BE}{AC} \quad \dots (*)$$

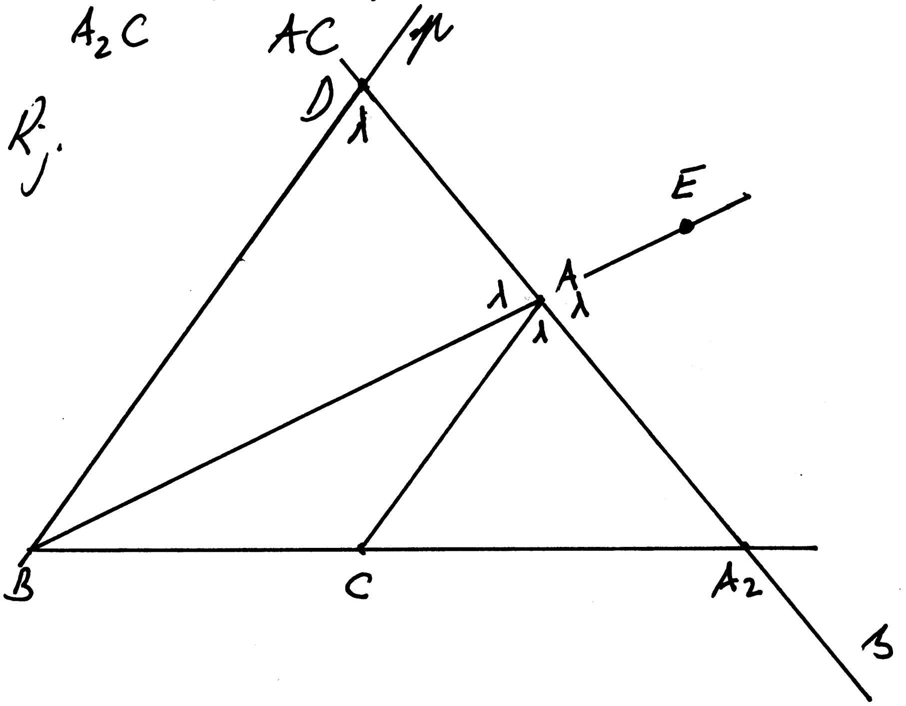
Primjetimo da je $\triangle BEA$ jkk ($\sphericalangle BEA \cong \sphericalangle BAE$) $\Rightarrow BE \cong BA$

Sad prema $(*)$ $\Rightarrow$ $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$ q.e.d.

(#) Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je

$$\frac{A_2B}{A_2C}=\frac{AB}{AC}$$

Rj:



Neka je dat trougao $\triangle ABC$, i neka je s simetrala spoljašnjeg ugla A trougla. Sa A_2 označimo tačku

$$\{A_2\} = s \cap p(B,C).$$

Neka je p prava takva da $p \parallel p(A,C)$ i $B \in p$. Tada, kako je $p(B,D) \parallel p(A,C)$, gdje je $\{D\} = s \cap p$, prema $T_o\,T_o$

$$\frac{A_2B}{A_2C}=\frac{BD}{AC} \quad \ldots (*)$$

Pokažimo još da je $BD \cong AB$ tj. da je $\triangle ABD$ jkk. Neka je E proizvoljna tačka na pp$[B,A)$ t.d. $B-A-E$. Primjetimo da je $\measuredangle A_2AE \cong \measuredangle BAD = \lambda$ (unakrsni uglovi). Kako je $p(B,D) \parallel p(A,C)$ i $p(D,A_2)$ transferzala to je $\measuredangle CAA_2 \cong \measuredangle BDA_2 = \lambda$. Prema tome $\measuredangle BDA \cong \measuredangle BAD = \lambda$

$\Rightarrow \triangle ABD$ jkk $\Rightarrow BD \cong BA$

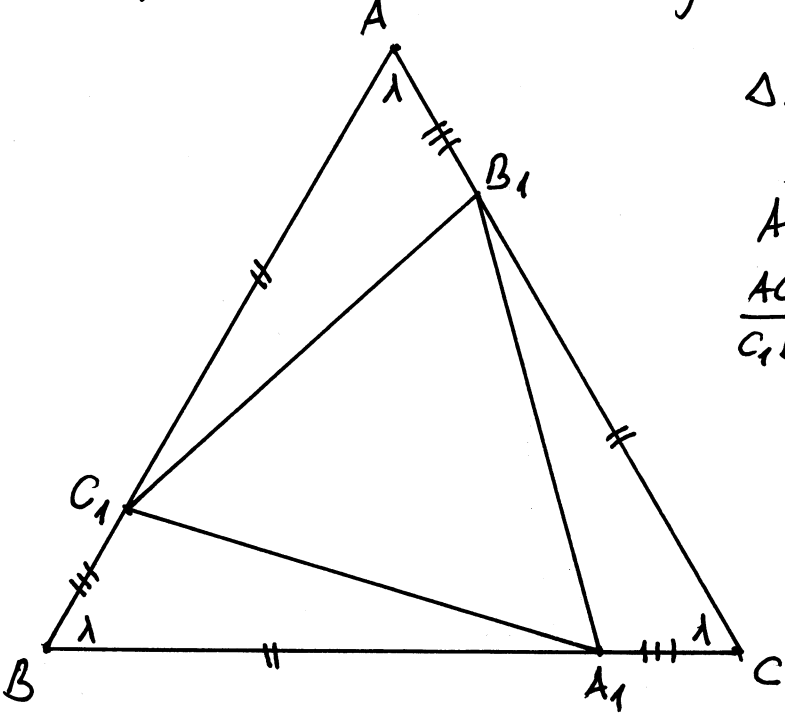
$$(*) \Rightarrow \frac{A_2B}{A_2C}=\frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

(#) Na stranicama BC, CA i AB trougla ABC date su redom tačke A_1, B_1 i C_1, takve da je $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Dokazati da je $\Delta A_1B_1C_1$ jednakostraničan ako i samo ako je ΔABC jednakostraničan.

Rj.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je ΔABC jednakostraničan i pokažimo da tada slijedi da je $\Delta A_1B_1C_1$ jkS.



ΔABC jkS $\Rightarrow AB \cong BC \cong CA$

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong BC \\ \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} \end{array}\right\} \Rightarrow AC_1 \cong BA_1 \text{ i } C_1B \cong A_1C$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \cong CA \\ \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} \end{array}\right\} \Rightarrow BA_1 \cong CB_1 \text{ i } A_1C \cong B_1A$$

$\Rightarrow BA_1 \cong CB_1 \cong AC_1$; $A_1C \cong B_1A \cong C_1B$.

Kako je ΔABC jkS $\Rightarrow \measuredangle C_1BA_1 \cong \measuredangle A_1CB_1 \cong \measuredangle B_1AC_1 = \lambda$.

Sad prema podudarnosti SUS $\Rightarrow \Delta C_1BA_1 \cong \Delta A_1CB_1 \cong \Delta B_1AC_1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

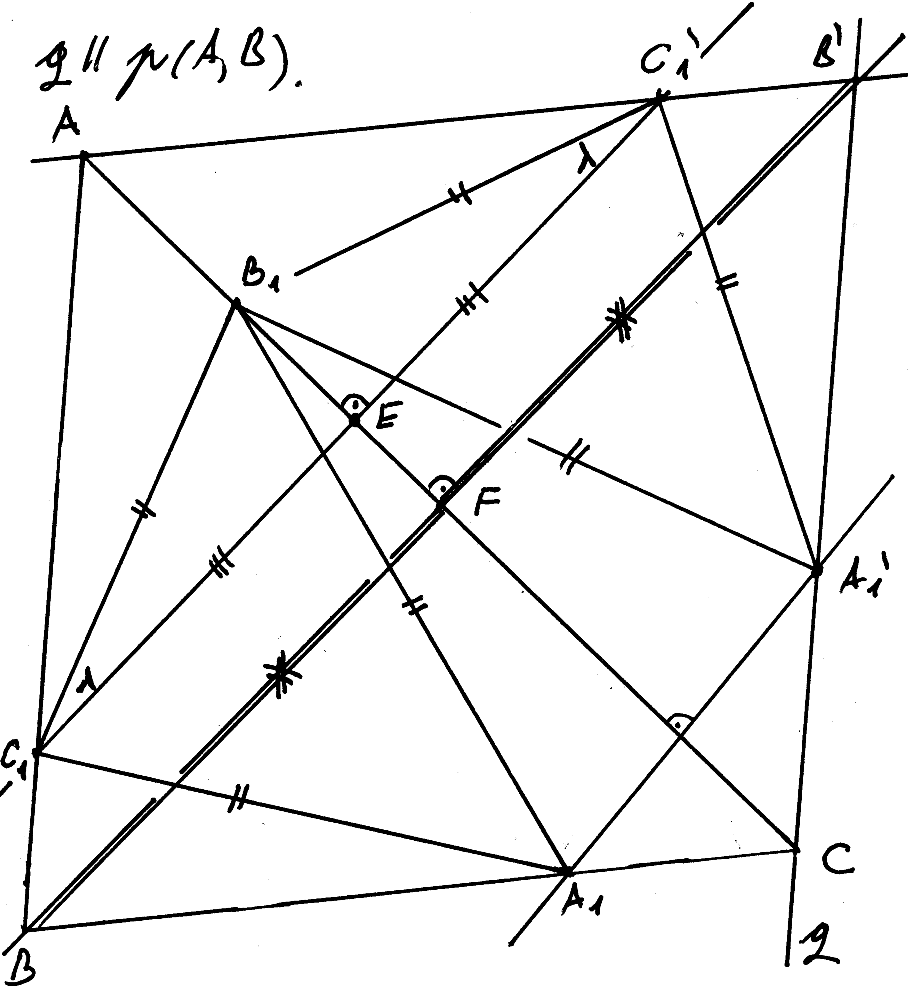
$C_1A_1 \cong A_1B_1 \cong B_1C_1$

$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1$ jkS q.e.d.

„$\Rightarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je $\Delta A_1B_1C_1$ jkS i pokažimo da je tada ΔABC jkS.

Nacrtajmo novu sliku. Kroz tačku A provucimo pravu p t.d. $p \parallel p(BC)$, a kroz tačku C provucimo pravu q t.d.

$g \parallel p(A,B)$.



Neka je B'

$\{B'\} = p \cap g$. Neka su C_1' i A_1' redom tačke na AB' i $B'C$ takve da

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1'}{C_1'B'} = \frac{B'A_1'}{A_1'C}.$$

Primjetimo da

$$\left.\begin{array}{l} BC \cong AB' \\ AB \cong B'C \\ AC \cong AC \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ABC \cong \Delta ACB'$$

Sad kako je $\Delta ABC \cong \Delta CB'A$ i kako za tačke A_1, B_1, C_1 i B_1, C_1', A_1' vrijede isti odnosi to je i $\Delta B_1A_1'C_1'$ jks. Dalje primjetimo

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} \quad i \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1'}{C_1'B'} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_1'}{C_1'B} \overset{O.T.T.}{\Longrightarrow} p(B,B') \parallel p(C_1,C_1')$$

Slično

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} \quad i \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{B'A_1'}{A_1'C} \Rightarrow \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_1'}{A_1'B} \overset{O.T.T.}{\Longrightarrow} p(A_1,A_1') \parallel p(B,B')$$

Neka je $\{E\} = C_1C_1' \cap AC$ i posmatrajmo ΔB_1C_1E i $\Delta B_1C_1'E$.
Prvo pokažimo da je E sredina stranice C_1C_1' pa pokažimo $\Delta B_1C_1E \cong \Delta B_1C_1'E$.
Znamo da se dijagonale paralelograma polove, pa neka se dijagonale paralelograma $ABCB'$ polove u tački F.

$$p(C_1,C_1') \parallel p(B,B') \overset{T.T.}{\Longrightarrow} \frac{AB'}{AC_1'} = \frac{AF}{AE} = \frac{B'F}{EC_1'} = \frac{AB}{AC_1} = \frac{BF}{C_1E} \Rightarrow \overbrace{\frac{B'F}{BF}}^{=1} = \frac{EC_1'}{C_1E}$$

$\Rightarrow EC_1' \cong C_1E \Rightarrow E$ sredina C_1C_1'

$$\left.\begin{array}{l} C_1B_1 \cong C_1'B_1 \\ \measuredangle EC_1B_1 \cong \measuredangle EC_1'B_1 = \lambda \\ B_1E \cong B_1E \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta B_1C_1E \cong \Delta B_1C_1'E$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle B_1EC_1 \cong \measuredangle B_1EC_1' = 90^\circ$$

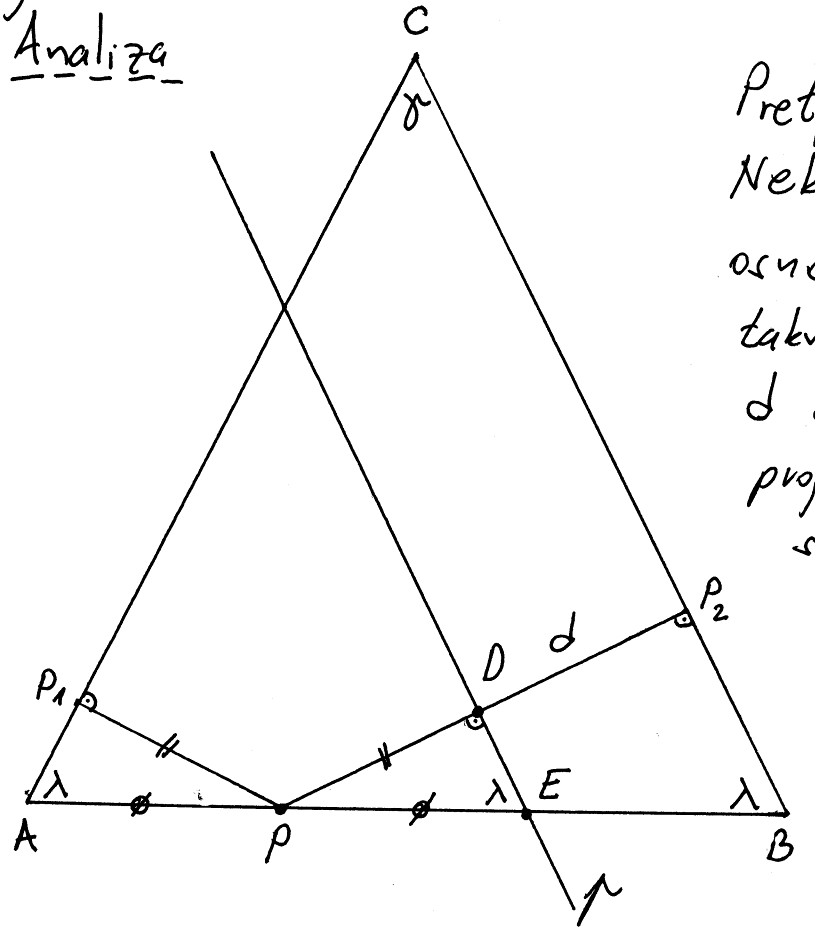
$\nearrow$ $\measuredangle BFA \cong \measuredangle B'FA = 90^\circ$

ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

(#) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

Rj:

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je P tražena tačka na osnovici AB datog jkk $\triangle ABC$ takva da je $PP_1 - PP_2 = d$ gdje je d data duž, a P_1 i P_2 su ortog. projekcije tačke P redom na stranice AC i BC.

Na duži PP_2 izaberimo tačku D t.d. $PP_1 \cong PD$, i kroz tačku D postavimo pravu $p \parallel p(B,C)$.

$p \parallel p(B,C)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle PED \cong \measuredangle PBC$

$$\left.\begin{array}{c} \measuredangle PAP_1 \cong \measuredangle PED = \lambda \\ \measuredangle PP_1A \cong \measuredangle EDP = 90^\circ \\ PP_1 \cong PD \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle APP_1 \cong \triangle PED$$

$$\Downarrow$$

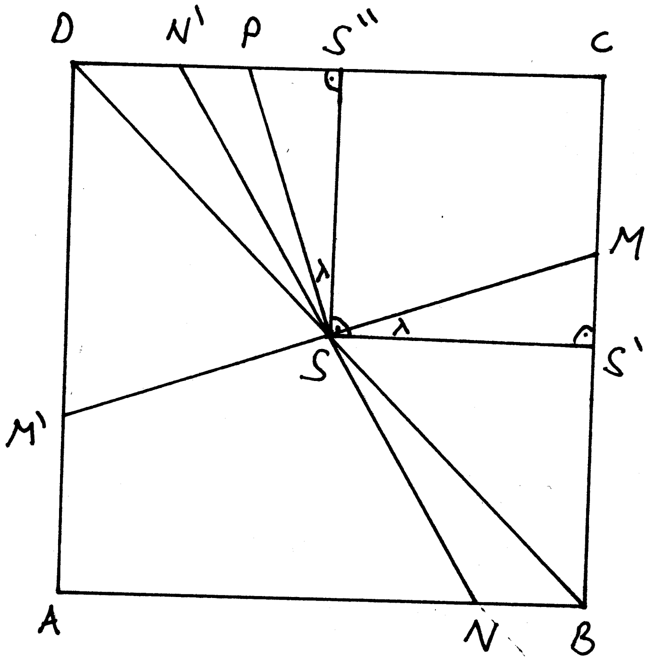
$$AP \cong PE$$

Kako je dat $\triangle ABC$ i dužina d, to pravu p možemo konstruisati (prava p se nalazi na rastojanju d od stranice BC). Poslije toga ćemo dobiti tačku E, pa nije teško konstruisati sredinu P duži AE.

(#) Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ čiji je centar opisane kružnice tačka S (ujedno i presjek dijagonala) i neka su date tačke $M \in BC$ i $N \in AB$.

$p(M,S) \cap AD = \{M'\}$

$p(N,S) \cap CD = \{N'\}$

Neka su S' i S'' redom sredine stranica BC i CD.

SS' srednja linija $\Delta DBC \Rightarrow SS' = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB$

SS'' srednja linija $\Delta ACD \Rightarrow SS'' = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$

$\Big\} \Rightarrow SS' \cong SS''$

Nije teško pokazati (iz podudarnosti USU) da je $MS \cong M'S$ i da je $NS \cong N'S$.

Neka je $P \in CD$ takva $SP \perp MM'$. Označimo sa $\lambda = \measuredangle PSS''$.

$\measuredangle PSS' = 90^\circ + \lambda$, $\measuredangle PSS' = \measuredangle PSM + \measuredangle MSS' = 90^\circ + \measuredangle MSS' \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle MSS' = \lambda$

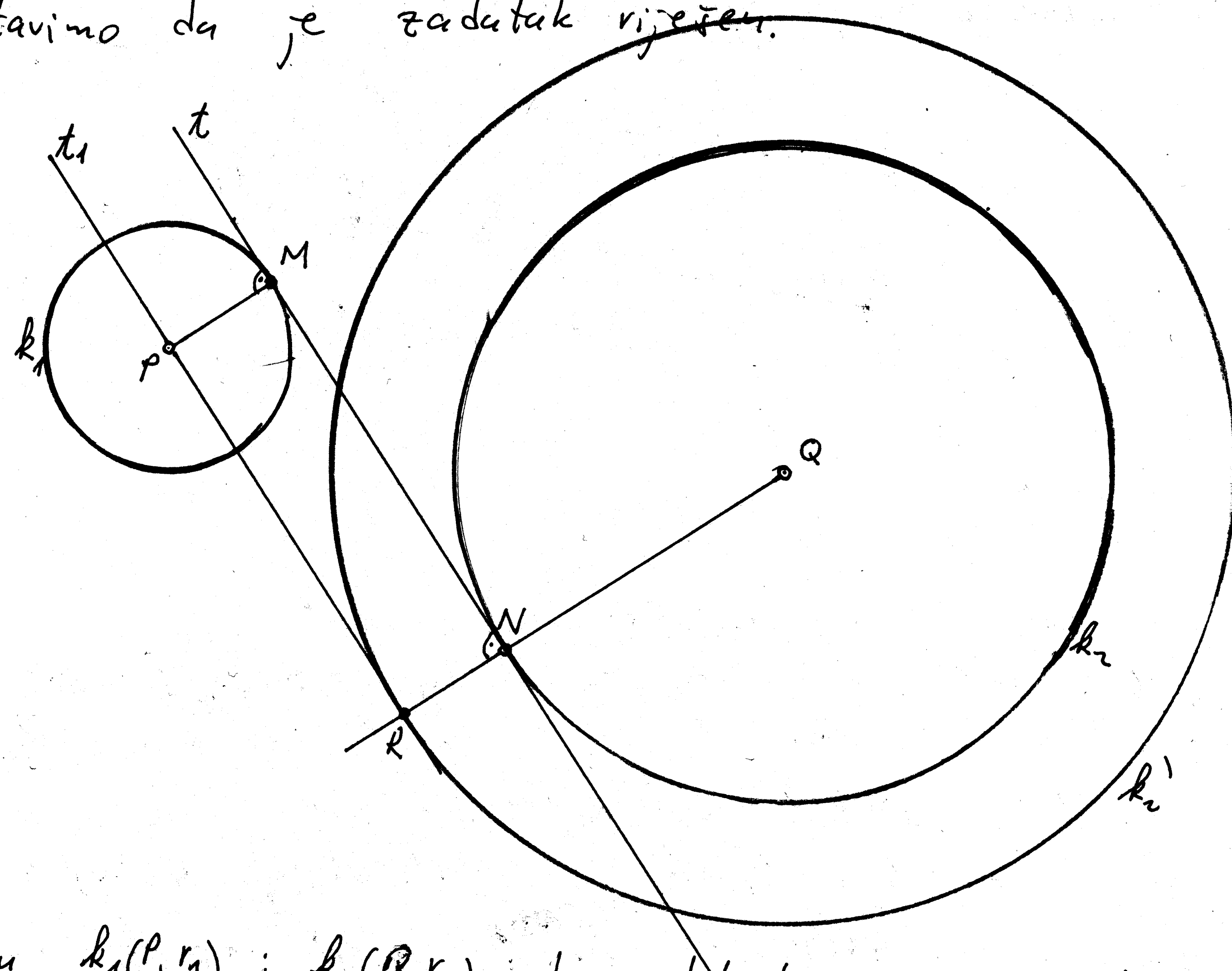
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MSS' \cong \measuredangle S''SP = \lambda \\ SS' \cong SS'' \\ \measuredangle SS'M \cong \measuredangle SS''P = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \Delta SS'M \cong \Delta SS''P \\ \Downarrow \\ SM \cong PS \end{array}$$

Kako su nam date tačke M i S to možemo konstruisati duž MM' a poslije toga i tačku P. Kako možemo konstruisati duž NN' time nije teško konstruisati i kvadrat $\square ABCD$.

(#) Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

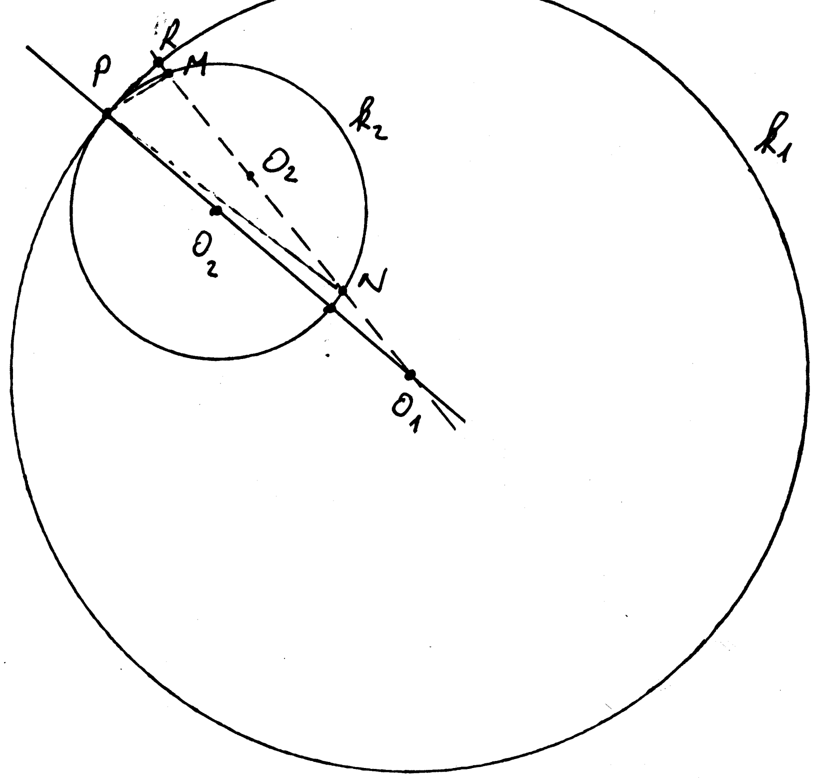
$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

Rj.



Posmatrajmo pravu $p(O_1, P)$. Ako tačka O_2 ne bi pripadala ovoj pravoj imali bi da $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{M, N\}$ gdje je MN prečnik kruga k_2. Recimo da je poredak O_1-N-O_2-M. Neka je R tačka na k_1 t.d. $N-M-R$.

Ugao nad prečnikom je prav tj. $\measuredangle MPN = 90°$. Kako je $\measuredangle MPO_1 > \measuredangle MPN \Rightarrow \measuredangle MPO_1$ je tup, pa u $\triangle MPO_1$ stranica MO_1 je najveća tj. $MO_1 > PO_1$

#kontradikcija
(PO_1 i RO_1 su poluprečnici kruga k_1 i kako je O_1-M-R to je $MO_1 < PO_1$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome tačke O_1, O_2 i P su kolinearne

q.e.d.